Γραμμικη Αλγεβρα II

Ασκησεις - Φυλλαδιο 3

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

4 - 4 - 2012

Άσκηση 1. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και βάσεις των αντίστοιχων ιδιοχώρων του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Ακολούθως να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Λύση. *Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-4)^2(\lambda-1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 4$ πολλαπλότητας δύο και $\lambda_2 = 1$ πολλαπλότητας ένα. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(4)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = y - z$$

και άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(4) &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\big\} \\ &= \big\{(y-z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{y(1,1,0) + z(-1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid y,z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \langle (1,1,0), (-1,0,1) \rangle \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και συνεπώς αποτελεί βάση του ιδιόχωρου $\mathcal{V}(4)$. Επομένως:

$$2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(4) = \text{αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_1 = 4 \tag{1}$$

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(1)$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{array} \right. \implies x = z \ \text{ και } \ y = -z$$

και άρα

$$\mathcal{V}(1) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \ \text{ και } \ y = -z\big\} = \big\{z(1,-1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\big\} = \langle (1,-1,1) \rangle$$

Επομένως:

$$1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = \text{αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής } \lambda_2 = 1 \tag{2}$$

Άρα από τις σχέσεις (1) *και* (2) *έπεται ότι ο πίνακας* A *διαγωνοποιείται. Ο αντιστρέψιμος πίνακας* P *που ψάχνουμε είναι ο πίνακας μετάβασης από τη κανονική βάση* $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *στη βάση* $\{(1,1,0),(-1,0,1),(1,-1,1)\}$. *Τότε*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα του P:

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, βρήκαμε αντιστρέψιμο πίνακα P *έτσι ώστε:* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Να βρεθεί ο πίνακας $A^m, \forall\, m \geq 1$.

Λύση. *Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 2$ *πολλαπλότητας δύο και* $\lambda_2 = 4$ *πολλαπλότητας ένα. Όπως στη προηγούμενη άσκηση, λύνοντας τα κατάλληλα ομογενή συστήματα, βρίσκουμε:*

$$\mathcal{V}(2) = \langle (1,0,1),(0,1,0) \rangle \quad \textit{και} \quad \mathcal{V}(4) = \langle (-1,0,1) \rangle$$

Αφού $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 2$ *και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(4) = 1$ *έπεται ότι ο πίνακας* A *διαγωνοποιείται. Συνεπώς υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A = P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}P^{-1} \implies A^2 = P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\implies A^2 = P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}^2 P^{-1}$$

$$\vdots$$

$$\implies A^m = P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}^m P^{-1}$$

και άρα

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}^m\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^m&0&0\\0&2^m&0\\0&0&4^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\ &\vdots \\ &= \begin{pmatrix}\frac{2^m+4^m}{2}&0&\frac{2^m-4^m}{2}\\0&2^m&0\\\frac{2^m-4^m}{2}&0&\frac{2^m+4^m}{2}\end{pmatrix} \qquad \square \end{aligned}$$

Άσκηση 3. *Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix}3&\alpha&\beta&\gamma\\0&3&\delta&\epsilon\\0&0&4&\zeta\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος;

Λύση. *Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix}3-\lambda&\alpha&\beta&\gamma\\0&3-\lambda&\delta&\epsilon\\0&0&4-\lambda&\zeta\\0&0&0&4-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(4-\lambda)^2$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 3$ πολλαπλότητας δύο και $\lambda_2 = 4$ πολλαπλότητας ένα. Για να διαγωνοποιείται ο πίνακας A θα πρέπει οι ιδιοτιμές του να ανήκουν στο $\mathbb{R}$, που ισχύει, καθώς

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(3) = 2 \ \text{ και } \ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(4) = 2$$

Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(3)$ έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta&\gamma\\0&0&\delta&\epsilon\\0&0&1&\zeta\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

και αφού

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(3) = 4 - \mathsf{rank}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έπεται ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(3) = 2$ *αν και μόνο αν η βαθμίδα*

$$\mathsf{rank}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Εύκολα κάνοντας γραμμοπράξεις έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathsf{rank}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \iff \alpha = 0 \tag{1}$$

΄Ομοια, για τον ιδιόχωρο ιδιόχωρο $\mathcal{V}(4)$ *έχουμε το ομογενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και άρα έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(4) = 2$ *αν και μόνο αν η βαθμίδα*

$$\mathsf{rank}\begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Κάνοντας στηλοπράξεις αυτή τη φορά έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathsf{rank}\begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & \delta & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff \zeta = 0 \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) *και* (2) *έπεται ότι για να διαγωνοποιείται ο πίνακας* A *πρέπει:* $\alpha = \zeta = 0$. □

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Να δειχθεί ότι: $A^{593} - 2A^{15} = -A$.

Λύση. *Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 3 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ *και* $\lambda_3 = -1$ *πολλαπλότητας ένα. Επομένως, ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος και εύκολα βρίσκουμε:*

$$\mathcal{V}(0) = \langle(-7, 1, -6)\rangle, \;\; \mathcal{V}(1) = \langle(1, 0, 1)\rangle, \;\; \mathcal{V}(-1) = \langle(3, 0, 1)\rangle$$

Συνεπώς υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A^{593} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{593} P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

και όμοια $A^{15} = A$. *Άρα, έχουμε:*

$$A^{593} - 2A^{15} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} = -A$$

Β΄ τρόπος: *Από το Θεώρημα των Cauley-Hamilton έχουμε ότι ο πίνακας* A *μηδενίζεται από το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, δηλαδή* $P_A(A) = 0$. *Επομένως*

$$-A^3 + A = 0 \implies A^3 = A$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} A^{593} &= A^{3\cdot 197+2} = (A^3)^{197} \cdot A^2 = A^{197} \cdot A^2 = A^{199} = A^{3\cdot 66+1} = A^{67} \\ &= A^{3\cdot 22+1} = A^{23} = A^{3\cdot 7+2} = A^9 = (A^3)^3 = A^3 = A \end{aligned}$$

και $A^{15} = (A^3)^5 = A^5 = A^{3\cdot 1+2} = A^3 \cdot A^2 = A^3 = A$. *Συνεπώς:*

$$A^{593} - 2A^{15} = A - 2A = -A \quad \square$$

Άσκηση 5. *Να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα* $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, *έτσι ώστε ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \mu \\ 3 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

Λύση. *Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \mu \\ 3 & 0 & \nu-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & \mu \\ 0 & \nu-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(\nu-\lambda)$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1) *Έστω* $\nu = 2$. *Τότε έχουμε την ιδιοτιμή* $\lambda = 2$ *με πολλαπλότητα τρια. Για να είναι ο* A *διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3$. *Όμως από το ομεγενές σύστημα*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

έπεται ότι

$$\mathsf{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \ \textit{αν} \ \mu \neq 0 \\ \\ 1 \ \textit{αν} \ \mu = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3-2 = 1 \neq 3 \ \textit{αν} \ \mu \neq 0 \\ \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3-1 = 2 \neq 3 \ \textit{αν} \ \mu = 0 \end{cases}$$

Άρα για $\nu = 2$ *και* $\mu \in \mathbb{R}$ *ο πίνακας* A *δεν διαγωνοποιείται.*

(2) *Έστω* $\nu \neq 2$. *Τότε έχουμε τις ιδιοτιμές* $\lambda_1 = 2$ *πολλαπλότητας δυο και* $\lambda = \nu$ *πολλαπλότητας ένα. Σε αυτή τη περίπτωση για να είναι ο πίνακας* A *διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 2$. *Έχουμε το ομογενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 3 & 0 & \nu-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\mathsf{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 3 & 0 & \nu-2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \ \textit{αν} \ \mu \neq 0 \\ \\ 1 \ \textit{αν} \ \mu = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3-2 = 1 \neq 2 \ \textit{αν} \ \mu \neq 0 \\ \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(2) = 3-1 = 2 \ \textit{αν} \ \mu = 0 \end{cases}$$

Επομένως για $\nu \neq 2$ *και* $\mu = 0$ *ο πίνακας* A *διαγωνοποιειται.* □

Άσκηση 6. *Να δείξετε ότι οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι όμοιοι.

Λύση. *Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 3$ πολλαπλότητας ένα. Επομένως, ο πίνακας A διαγωνοποιείται και άρα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς οι πίνακες A και B είναι όμοιοι. $\square$

Άσκηση 7. *Να βρεθεί ένας 3×3-πίνακας A για τον οποίο τα διανύσματα στήλες*

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του A με αντίστοιχες ιδιοτιμές $1, 2$ και 3.

Λύση. *Από υπόθεση οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικές με πολλαπλότητα ένα. Συνεπώς ο A διαγωνοποιείται και άρα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad \square$$

Άσκηση 8. (1) *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$.*
- (α') *Αν $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, να δείξετε ότι η f είναι διαγωνοποιήσιμη.*
- (β') *Αν $f^2 = f$, να δείξετε ότι η f είναι διαγωνοποιήσιμη.*

(2) *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.*
- (α') *Αν $A^2 = I_n$, να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
- (β') *Αν $A^2 = A$, να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Λύση. (1) (α') *Έστω $f \neq 0, \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ έτσι ώστε $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ και έστω λ ιδιοτιμή της f. Τότε υπάρχει $\vec{x} \neq 0$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Συνεπώς*

$$\begin{aligned} f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x} &\implies \vec{x} = \lambda^2\vec{x} \\ &\implies (1-\lambda^2)\vec{x} = \vec{0} \\ &\implies \lambda = 1, -1 \quad \text{αφού} \quad \vec{x} \neq 0 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$ και επομένως οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι:

$$\mathcal{V}(1) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\} \text{ και } \mathcal{V}(-1) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$$

Από την άσκηση 7 του Φυλλαδίου 1 έπεται ότι

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}(1) \oplus \mathcal{V}(-1)$$

και άρα καταλήγουμε ότι η f είναι πράγματι διαγωνοποιήσιμη.

(β′) *Έστω* λ *ιδιοτιμή της* f. *Τότε υπάρχει* $\vec{x} \neq 0$ *έτσι ώστε* $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ *και άρα έχουμε:*

$$\begin{aligned} f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x} \quad &\Longrightarrow \quad f(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x} \\ &\Longrightarrow \quad \lambda\vec{x} = \lambda^2\vec{x} \\ &\Longrightarrow \quad \lambda(\lambda-1)\vec{x} = \vec{0} \\ &\Longrightarrow \quad \lambda = 0,1 \quad \text{αφού} \quad \vec{x} \neq 0 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$ *και* $\lambda_2 = 1$ *με αντίστοιχους ιδιοχώρους:*

$$\mathcal{V}(0) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\} \ \text{ και } \ \mathcal{V}(1) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\}$$

Τότε $\mathcal{V}(0) = \operatorname{Ker} f$ *και θα δείξουμε ότι*

$$\mathcal{V}(1) = \operatorname{Im} f = \{\vec{y} \in \mathcal{E} \mid \exists\, \vec{x} \in \mathcal{E} \ \text{ έτσι ώστε } \ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

Έστω $\vec{y} \in \operatorname{Im} f$. *Τότε*

$$\vec{y} = f(\vec{x}) \implies f(\vec{y}) = f^2(\vec{x}) = f(\vec{x}) = \vec{y}$$

και άρα $\vec{y} \in \mathcal{V}(1)$, *δηλαδή δείξαμε ότι* $\operatorname{Im} f \subseteq \mathcal{V}(1)$. *Προφανώς όμως ισχύει ότι* $\mathcal{V}(1) \subseteq \operatorname{Im} f$ *και επομένως* $\mathcal{V}(1) = \operatorname{Im} f$. *Τότε από την άσκηση* 7 *του Φυλλαδίου* 1 *έχουμε*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}(0) \oplus \mathcal{V}(1)$$

και άρα έπεται ότι η f *είναι διαγωνοποιήσιμη όταν* $f^2 = f$.

(2) *Υπενθυμίζουμε ότι αν έχουμε ένα πίνακα* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, *τότε έχουμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f_A : \ \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}), \ f(X) = A \cdot X$$

και ο πίνακας A *διαγωνοποιείται αν και μόνο αν η γραμμική απεικόνιση* f_A *είναι διαγωνοποιήσιμη. Αν* $A^2 = I_n$ *τότε έπεται εύκολα ότι* $f_A^2 = \operatorname{Id}_{\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})}$ *και αν* $A^2 = A$ *τότε έχουμε* $f_A^2 = f_A$. *Συνεπώς και στις δυο περιπτώσεις από το ερώτημα* (1) *έχουμε ότι ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος.* □

Άσκηση 9. *Έστω* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ *και* $(z_n)_{n\geq 0}$ *ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι οποίες συνδέονται με τις παρακάτω αναγωγικές σχέσεις,* $\forall n \geq 1$:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} \\ y_n &= -2x_{n-1} - 3y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n &= 2x_{n-1} + 4y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{aligned}$$

Να βρεθούν οι ακολουθίες, αν γνωρίζουμε ότι : $x_0 = 2, \ y_0 = 3, \ z_0 = 1$.

Λύση. *Από τις αναγωγικές σχέσεις έχουμε:*

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Θέτουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Τότε αφού

$$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix}$$

από τη σχέση (1) *έπεται ότι*

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Συνεπώς από τη παραπάνω σχέση αρκεί να βρούμε το πίνακα A^n*. Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -3-\lambda & -2 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(\lambda+1)$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ *πολλαπλότητας δύο και* $\lambda_2 = -1$ *πολλαπλότητας ένα. Εύκολα βρίσκουμε:*

$$\mathcal{V}(1) = \langle(-2,1,0),(-1,0,1)\rangle \quad \textit{και} \quad \mathcal{V}(-1) = \langle(0,-1,1)\rangle$$

Αφού $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(1) = 2$ *και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(-1) = 1$ *έπεται ότι ο πίνακας* A *διαγωνοποιείται. Συνεπώς υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας*

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \Longrightarrow A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

και εκτελώντας τους παραπάνω πολλαπλασιασμούς βρίσκουμε

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+(-1)^{n+2} & -1-2(-1)^{n+1} & -1+(-1)^{n+2} \\ 1+(-1)^{n+1} & 2-2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Άρα από τη σχέση (2) *και τη περιγραφή του πίνακα* A^n *έχουμε:*

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \begin{cases} x_n = 2 \\ y_n = 9(-1)^n - 6 \\ z_n = -9(-1)^n + 10 \end{cases} \qquad \square$$